



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Soňa Šimonová

# **Agregace rizik zohledňující šikmost**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Na tomto mieste by som chcela poďakovať RNDr. Lucii Mazurovej, Ph.D. za odborné vedenie tejto práce a veľa cenných pripomienok a rád pri jej vypracovávaní.

Název práce: Agregace rizik zohledňující šikmost

Autor: Soňa Šimonová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Hlavným predmetom tejto práce je rozbor rôznych prístupov zohľadňovania šikmosti pri výpočte ekonomického kapitálu poisťovne. Na výpočet ekonomického kapitálu sa v práci používajú dve alternatívne miery rizika – hodnota v riziku (VaR) a podmienená hodnota v riziku (CVaR). Prvá časť práce sa zaoberá odvodením presných vzorcov pre VaR a CVaR pre normálne rozdelené straty. Vysvetlená je úprava týchto vzorcov využívajúca Cornish-Fisherovu aproximáciu. Ďalej je popísaný prístup pracujúci s modelom lognormálneho rozdelenia, ktorý používa parameter, závislý na šikmosti. Pomocou tohto parametru sa odvodí vzorec pre šikmosť súčtu strát. Na základe znalosti šikmosti pre súčet sa získa jeho aproximácia, ktorá sa využije na odvodenie vzorcov pre VaR a CVaR pre agregované straty. Nakoniec sú jednotlivé prístupy porovnané v numerickej štúdii s použitím softvéru R.

Klíčová slova: ekonomický kapitál, hodnota v riziku, podmienená hodnota v riziku, šikmosť, Cornish-Fisherova aproximácia, lognormálne rozdelenie

Title: Risk Aggregation Allowing for Skewness

Author: Soňa Šimonová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The main objective of this thesis is to examine different methods of calculation of economic capital for an insurance company which allow for skewness. For calculating the economic capital we use two alternative risk measures – Value at Risk (VaR) and Conditional Value at Risk (CVaR). The first part of the thesis is concerned with deriving exact formulae for VaR and CVaR for normally distributed losses and describing the modification of these formulae using Cornish-Fisher approximation. Next, the method using lognormal model with a parameter capturing skewness is discussed. The parameter is used for deriving a formula for skewness of a sum of losses. The approximation of the sum is thus obtained and is used for deriving formulae for VaR and CVaR for aggregated losses. Finally, the methods are compared numerically using R software.

Keywords: economic capital, Value at Risk, Conditional Value at Risk, skewness, Cornish-Fisher approximation, lognormal distribution

# Obsah

<b>Zoznam použitých skratiek</b>	<b>2</b>
<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Základné definície a pojmy</b>	<b>4</b>
1.1 Pojem rizika a ekonomického kapitálu . . . . .	4
1.2 Miery rizika . . . . .	5
<b>2 Agregácia normálne rozdelených strát a Cornish-Fisherova apro- ximácia</b>	<b>7</b>
2.1 Agregácia normálne rozdelených strát . . . . .	7
2.2 Cornish-Fisherova aproximácia . . . . .	8
2.3 Kalibrácia vzorcov pre normálne rozdelené straty . . . . .	10
<b>3 Logaritmicko-normálna aproximácia</b>	<b>13</b>
<b>4 Numerická štúdia</b>	<b>18</b>
<b>Záver</b>	<b>23</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>24</b>
<b>A Prílohy</b>	<b>25</b>
A.1 Numerická štúdia – tabuľky . . . . .	25
A.2 Numerická štúdia – použité korelačné matice . . . . .	30

# Zoznam použitých skratiek

$\mathbb{R}_{+,0}$	kladné reálne čísla s nulou
$\mathcal{B}(\mathbb{R}_{+,0})$	borelovská $\sigma$ -algebra na kladných reálnych číslach s nulou
$E(X)$	stredná hodnota náhodnej veličiny $X$
$\text{var}(X)$	rozptyl náhodnej veličiny $X$
$\text{cor}(X_i, X_j)$	korelácia náhodných veličín $X_i$ a $X_j$
$\text{cov}(X_i, X_j)$	kovariancia náhodných veličín $X_i$ a $X_j$
$N(\mu, \sigma^2)$	normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu$ a rozptylom $\sigma^2$
$N(0,1)$	štandardné normálne rozdelenie
$\Phi$	distribučná funkcia $N(0,1)$ rozdelenia
$\phi$	hustota $N(0,1)$ rozdelenia
$z_{1-\alpha}$	$(1 - \alpha)$ -kvantil $N(0,1)$ rozdelenia

# Úvod

Podstatou činnosti poisťovne je poskytovanie poisťného plnenia v prípade výskytu určitých náhodných udalostí. Aby bola poisťovňa schopná dostať svojim záväzkom spočívajúcim vo výplate poisťných plnení s dostatočne veľkou pravdepodobnosťou, je potrebné stanoviť výšku kapitálu, ktorý má mať k dispozícii na začiatku obdobia. *Rizikom* rozumejme ako McNeil, Frey a Embrechts (2005) náhodnú veličinu predstavujúcu straty v uvažovanom období. Pri výpočte kapitálu je treba brať v úvahu všetky riziká, ktorým je poisťovňa vystavená. Ďalšou úlohou je voľba vhodného rozdelenia pre jednotlivé riziká. Pre riziká, ktorým sú vystavené rôzne finančné inštitúcie, je najčastejšie používaným modelom normálne rozdelenie. Pre väčšinu poisťných rizík je však typické, že výskyt malých škôd je častejší, než výskyt veľkých škôd. Pri voľbe rozdelenia poisťných rizík je preto nutné zohľadniť šikmosť, inak by mohol výsledný kapitál nadobúdať oveľa nižšie hodnoty ako v skutočnosti.

Práca je členená do štyroch kapitol a skladá sa z teoretickej časti, ktorá tvorí prvé tri kapitoly, a numerickej štúdie. V teoretickej časti sú zhrnuté potrebné podklady pre numerickej štúdiu.

V prvej kapitole si vysvetlíme pojem ekonomického kapitálu a spôsob jeho výpočtu. Ďalej si definujeme miery rizika VaR a CVaR, pomocou ktorých budeme ekonomický kapitál počítať.

V druhej kapitole si odvodíme vzorec pre výpočet ekonomického kapitálu, v prípade, že uvažujeme normálne rozdelené straty. Ukážeme, že ekonomický kapitál súčtu rizík je možné vypočítať na základe znalosti ekonomických kapitálov pre jednotlivé riziká v súčte. Stručne popíšeme tzv. Cornish-Fisherovu aproximáciu, ktorá berie v úvahu šikmosť, a s jej použitím si odvodíme približné vyjadrenie ekonomického kapitálu. Vysvetlíme úpravu vzorca pre normálne rozdelené straty, ktorú vo svojom článku uviedol Sandstrom (2007).

V tretej kapitole sa zaoberáme modelom logaritmicko-normálneho rozdelenia. Popíšeme aproximáciu rozdelenia súčtu jednotlivých rizík, s ktorou prišli Bolviken a Guillen (2017), s využitím vzorca pre šikmosť súčtu. Na základe tejto aproximácie si vyjadríme odhad ekonomického kapitálu.

Teoretické výsledky porovnáme v numerickej štúdii v štvrtej kapitole.

# 1. Základné definície a pojmy

## 1.1 Pojem rizika a ekonomického kapitálu

V tejto práci budeme uvažovať náhodnú veličinu  $Y$  z merateľného priestoru  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  do  $(\mathbb{R}_{+,0}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_{+,0}))$  predstavujúcu straty za isté obdobie pevne zvolenej dĺžky  $T$  so spojitým rozdelením. Ďalej označme  $X = Y - \mathbb{E}(Y)$  centrovanú verziu náhodnej veličiny  $Y$  a  $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$  distribučnú funkciu  $X$ .

V úvodnej časti sme si definovali riziko ako náhodnú veličinu predstavujúcu straty za isté obdobie. Teda  $Y$  a  $X$  pre nás predstavujú riziká. Definujme si mieru rizika ako v Gaivoronski a Pflug (2004-2005).

**Definícia 1.** Miera rizika je zobrazenie  $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $V$  je množina reálnych náhodných veličín.

*Ekonomický kapitál* (ďalej tiež kapitál) rozumieme ako McNeil a kol. (2005) kapitál potrebný k zaisteniu schopnosti splniť v danom časovom horizonte prevzaté záväzky s danou pravdepodobnosťou. Ekonomický kapitál vyjadríme ako

$$\text{EC}(Y) = \rho(Y) - \mathbb{E}(Y),$$

kde  $\rho(Y)$  je miera rizika a  $\mathbb{E}(Y)$  je očakávaná hodnota straty. V ďalšej sekcii si ukážeme, že existujú miery rizika, pre ktoré

$$\text{EC}(Y) = \rho(Y - \mathbb{E}(Y)) = \rho(X) = \text{EC}(X). \quad (1.1)$$

V našej práci sa zaoberáme takými mierami rizika, ktoré tento vzťah splňujú.

Nech  $Y_i, i = 1, \dots, n$  predstavujú riziká, ktorým je poisťovňa vystavená. Pre celkové riziko  $R$  platí

$$R = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Z 1.1 vieme, že pri vyšetrovaní ekonomického kapitálu náhodných veličín  $Y_i, i = 1, \dots, n$ , respektíve  $R$ , nám stačí vyšetrovať kapitál pre  $X_i = Y_i - \mathbb{E}(Y_i), i = 1, \dots, n$ , prípadne  $S$ , kde

$$S = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Zrejme  $S = \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) = R - \mathbb{E}(R)$ , čo plynie z vlastností strednej hodnoty (viď Anděl, 2005)

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \mathbb{E}(R).$$

Ekonomický kapitál, potrebný k pokrytiu strát  $X_i$  je  $\text{EC}(X_i) = \rho(X_i)$ , podobne pre celkovú stratu  $S$  je  $\text{EC}(S) = \rho(S)$ . Predpokladáme, že  $X_i$  sú závislé náhodné veličiny,  $i = 1, \dots, n$ . Na vyjadrenie závislosti budeme používať koeficienty korelácie

$$\rho_{ij} = \text{cor}(X_i, X_j) = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{var}(X_i)}\sqrt{\text{var}(X_j)}}.$$



Pre nájdenie vhodného modelu pre rozdelenie  $X_i$  sa vychádza z údajov o minulom škodnom priebehu. Na modelovanie rozdelenia  $X_i$  sa môže použiť známe rozdelenie pravdepodobností, ktorého parametre sa odhadnú na základe napozorovaných dát (viď Mazurová a Mandl, 1999).

Naším cieľom bude stanoviť  $EC(S)$ , prípadne jeho aproximáciu  $\widehat{EC}(S)$ , na základe týchto hodnôt stanovených pre straty  $X_i, i = 1, \dots, n$ , nakoľko presné rozdelenie  $S$  v mnohých prípadoch nepoznáme.

## 1.2 Miery rizika

Definujeme si dve alternatívne miery rizika podľa McNeil a kol. (2005), s ktorými budeme pracovať – hodnotu v riziku (*Value at Risk*) a podmienenú hodnotu v riziku (*Conditional Value at Risk*). Za týmto účelom si najskôr zavedieme pojem  $\alpha$ -kvantilu náhodnej veličiny.

Definujeme  $\alpha$ -kvantil ako v Anděl (2005).

**Definícia 2.** *Nech  $X$  je náhodná veličina a  $\alpha$  je predom stanovené číslo z intervalu  $(0,1)$ . Potom  $\alpha$ -kvantil náhodnej veličiny  $X$  definujeme ako číslo*

$$C_\alpha := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq \alpha\}.$$

Číslo  $\alpha$  z definície 2 nazývame *spoľahlivosť* alebo *hladina*. Uvažujeme  $F$  spojitú. Z vlastností distribučnej funkcie vieme, že  $F$  je neklesajúca. V prípade, že  $F$  je ostro rastúca, je  $C_\alpha$  obyčajná inverzná funkcia k  $F$  v bode  $\alpha$ , teda

$$C_\alpha = F^{-1}(\alpha)$$

a  $C_\alpha$  je jediným riešením rovnice

$$P(X \leq x) = \alpha. \quad (1.2)$$

Ak  $F$  nie je ostro rastúca, potom rovnica 1.2 môže mať viacero riešení tvoriacich interval, pričom  $C_\alpha$  je jeho koncovým bodom.

*Poznámka.*

1. Pre  $\alpha$ -kvantil náhodnej veličiny  $X \sim N(0,1)$  budeme používať značenie  $z_\alpha$ .
2. Pre  $(1 - \alpha)$ -kvantil  $X$  platí  $C_{1-\alpha} = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq 1 - \alpha\} = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X > x) \leq \alpha\}$ .

**Definícia 3.** *Nech  $X$  je náhodná veličina a  $\alpha \in (0,1)$ . Hodnotu v riziku (VaR) náhodnej veličiny  $X$  na hladine  $\alpha$  definujeme ako  $(1 - \alpha)$ -kvantil náhodnej veličiny  $X$ , teda*

$$\text{VaR}_\alpha(X) := C_{1-\alpha} = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X > x) \leq \alpha\}.$$

Pri výpočte kapitálu na základe hodnoty v riziku teda budeme pracovať s  $(1 - \alpha)$ -kvantilmi náhodných veličín  $X_i$ . Ekonomický kapitál náhodnej veličiny  $Y =$

$X + E(Y)$  pri miere rizika  $\text{VaR}$  je rovný

$$\begin{aligned} EC(Y) &= \text{VaR}_\alpha(Y) - E(Y) = \\ &= \inf\{y \in \mathbb{R} \mid P(Y > y) \leq \alpha\} - E(Y) = \inf\{y - E(Y) \in \mathbb{R} \mid P(Y > y) \leq \alpha\} = \\ &= \inf\{y - E(Y) \in \mathbb{R} \mid P(Y - E(Y) > y - E(Y)) \leq \alpha\} = \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X > x) \leq \alpha\} = \text{VaR}_\alpha(X). \end{aligned}$$

Ďalšou mierou, ktorú si definujeme je podmienená hodnota v riziku (*Conditional Value at Risk*), v literatúre nazývaná tiež *Tail Value at Risk*. Pre podmienenú hodnotu v riziku budeme používať značenie  $\text{CVaR}$ .

**Definícia 4.** *Nech  $X$  je náhodná veličina so spojitým rozdelením a  $\alpha \in (0,1)$ . Podmienenú hodnotu v riziku ( $\text{CVaR}$ ) náhodnej veličiny  $X$  na hladine  $\alpha$  definujeme ako*

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = E(X \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X)).$$

Zo znalostí o podmienenom rozdelení a podmienenej strednej hodnote (viď Anděl, 2005) máme

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(X) &= E(X \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X)) = \frac{E(X I_{[X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]})}{P(X \geq \text{VaR}_\alpha(X))} = \\ &= \frac{E(X I_{[X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]})}{1 - P(X < \text{VaR}_\alpha(X))} = \frac{E(X I_{[X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]})}{1 - F(\text{VaR}_\alpha(X))} = \frac{E(X I_{[X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]})}{1 - F(C_{1-\alpha})} = \\ &= \frac{1}{\alpha} E(X I_{[X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ďalej s využitím vlastností podmienenej strednej hodnoty (viď Anděl, 2005) dostávame, že ekonomický kapitál náhodnej veličiny  $Y = X + E(Y)$  pri miere rizika  $\text{CVaR}$  je rovný

$$\begin{aligned} EC(Y) &= \text{CVaR}_\alpha(Y) - E(Y) = \\ &= E(Y \mid Y \geq \text{VaR}_\alpha(Y)) - E(Y) = E(Y - E(Y) \mid Y \geq \text{VaR}_\alpha(Y)) = \\ &= E(X \mid Y \geq \text{VaR}_\alpha(Y)) = \frac{1}{\alpha} E(X I_{[Y \geq \text{VaR}_\alpha(Y)]}) = \\ &= \frac{1}{\alpha} E(X I_{[X \geq \text{VaR}_\alpha(Y) - E(Y)]}) = \frac{1}{\alpha} E(X I_{[X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]}) = \text{CVaR}_\alpha(X). \end{aligned}$$

*Riziková funkciu (hazard function) definujeme podľa knihy Klugman, Panjer a Willmot (2004).*

**Definícia 5.** *Nech  $X$  má spojité rozdelenie s hustotou  $f$  a distribučnou funkciou  $F$ . Potom rizikovou funkciou rozumieme funkciu  $h_X$ , definovanú vzťahom*

$$h_X(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{P(X > x)},$$

pre také  $x$ , pre ktoré je  $f(x)$  definovaná.

*Poznámka.* Odvodíme si  $\text{CVaR}_\alpha(X)$  pre  $X \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned} \text{CVaR}_\alpha(X) &= \frac{1}{\alpha} E(X I_{[X \geq \text{VaR}_\alpha(X)]}) = \frac{1}{\alpha} E(X I_{[X \geq z_{1-\alpha}]}) = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{z_{1-\alpha}}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_{1-\alpha}^2}{2}} = \\ &= \frac{\phi(z_{1-\alpha})}{\alpha} = h_X(z_{1-\alpha}). \end{aligned}$$

# 2. Agregácia normálne rozdelených strát a Cornish-Fisherova aproximácia

## 2.1 Agregácia normálne rozdelených strát

Agregácia normálne rozdelených strát je popísaná v článku od Sandstroma (viď Sandstrom, 2007) a článku od Bolvikena a Guillena (Bolviken a Guillen, 2017).

Nech  $X_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  a  $C_i$  sú  $(1 - \alpha)$ -kvantily  $X_i, i = 1 \dots, n$ . Ďalej pre súčet

$$S = \sum_{i=1}^n X_i$$

označme  $\sigma_S^2 = \text{var}(S)$ ,  $\mu_S = E(S)$  a  $C_S$   $(1 - \alpha)$ -kvantil náhodnej veličiny  $S$ . Zo znalostí z matematickej štatistiky vieme, že môžeme vyjadriť presné rozdelenie náhodnej veličiny  $S$ . Z vlastností normálneho rozdelenia máme, že  $S \sim N(0, \sigma_S^2)$ . Rozptyl  $\sigma_S^2$  dostaneme zo vzťahu pre rozptyl súčtu  $n$  náhodných veličín (viď Anděl, 2005)

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= \text{var} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) + 2 \sum_{i < j}^n \text{cov}(X_i, X_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Najskôr budeme počítat kapitál, potrebný k pokrytiu straty  $X \sim N(0, \sigma^2)$  na základe miery rizika VaR. Pre  $\alpha \in (0, 1)$  hľadáme riešenie rovnice

$$P(X \leq C_\alpha) = 1 - \alpha.$$

Označme  $Z = X/\sigma$  Potom  $Z \sim N(0, 1)$  a platí

$$\begin{aligned} P \left( Z \leq \frac{C_\alpha}{\sigma} \right) &= 1 - \alpha \\ \Phi \left( \frac{C_\alpha}{\sigma} \right) &= 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Musí preto platiť  $\text{VaR}_\alpha(X) = C_\alpha = z_{1-\alpha} \sigma$ . Prenásobením 2.1 kvantilom  $z_{1-\alpha}^2$  dostávame

$$z_{1-\alpha}^2 \sigma_S^2 = \sum_{i=1}^n z_{1-\alpha}^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j}^n z_{1-\alpha}^2 \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j. \quad (2.2)$$

Prepisom dostávame rovnosť

$$\text{VaR}_\alpha(S) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{VaR}_\alpha(X_i)^2 + 2 \sum_{i < j}^n \rho_{ij} \text{VaR}_\alpha(X_i) \text{VaR}_\alpha(X_j)}.$$

Ďalej si odvodíme CVaR pre  $X \sim N(0, \sigma^2)$  s využitím odvodu 1.3, teda

$$\begin{aligned}\text{CVaR}_\alpha(X) &= \mathbb{E}(Z\sigma | Z\sigma \geq \text{VaR}_\alpha(X)) = \\ &= \sigma \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(ZI_{[Z\sigma \geq z_{1-\alpha}\sigma]}) = \sigma \frac{\phi(z_{1-\alpha})}{\alpha} = \sigma h_X(z_{1-\alpha}).\end{aligned}$$

Prenásobením 2.1 hodnotou  $h_X^2(z_{1-\alpha})$  dostávame

$$h_X^2(z_{1-\alpha})\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^n h_X^2(z_{1-\alpha})\sigma_i^2 + 2 \sum_{i<j}^n h_X^2(z_{1-\alpha})\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j, \quad (2.3)$$

čo nám dáva

$$\text{CVaR}_\alpha(S) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{CVaR}_\alpha(X_i)^2 + 2 \sum_{i<j}^n \rho_{ij} \text{CVaR}_\alpha(X_i) \text{CVaR}_\alpha(X_j)}.$$

Pre kapitál  $\text{EC}(S)$  máme vyjadrenie

$$\text{EC}(S) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{EC}(X_i)^2 + 2 \sum_{i<j}^n \rho_{ij} \text{EC}(X_i) \text{EC}(X_j)}.$$

Vzorce pre CVaR a VaR odvodené v tejto sekcii sú presné pre normálne rozdelené straty. Ako sme už spomínali, v poisťovníctve má väčšina rizík šikmé rozdelenie, preto normálne rozdelenie nie je vhodným modelom. Pre rozdelenie strát sa používajú rôzne aproximatívne vyjadrenia, ktoré berú v úvahu šikmost. V nasledujúcej sekcii si odvodíme približné vyjadrenie pre ekonomický kapitál celkovej straty  $S$  pomocou takzvanej Cornish-Fisherovej aproximácie.

## 2.2 Cornish-Fisherova aproximácia

Na aproximáciu rozdelenia škodných úhrnov sa často využíva Cornish-Fisherova expanzia, ktorá je v poisťno-matematickej literatúre známa tiež ako normálna mocninná aproximácia. Ide o aproximáciu normovanej náhodnej veličiny  $Z = (X - \mathbb{E}(X))/\sigma$  rozdelením  $N(0,1)$ , ktorá využíva koeficient šikmosti  $\gamma$  náhodnej veličiny  $X$ . My uvažujeme  $\mathbb{E}(X) = 0$ .

Základnou myšlienkou je nájsť funkciu  $g(y)$  tak, aby platilo

$$\mathbb{P}(Z \leq g(y)) = F_Z(g(y)) \doteq \Phi(y),$$

kde  $F_Z$  je distribučná funkcia  $Z$ . Ukáže sa, že

$$g(y) = y + \frac{\gamma}{6}(y^2 - 1).$$

Teda aproximácia bude vyzerat nasledovne

$$F_Z\left(y + \frac{\gamma}{6}(y^2 - 1)\right) \doteq \Phi(y). \quad (2.4)$$

Odvodenie funkcie  $g(y)$  sa nachádza v knihe Mazurová a Mandl (1999).

Pri miere rizika VaR hľadáme pre  $\alpha \in (0,1)$  riešenie rovnice

$$P(X \leq C_\alpha) = 1 - \alpha. \quad (2.5)$$

Na vyjadrenie približného riešenia 2.5 použijeme Cornish-Fisherovu aproximáciu. Prepisom dostávame

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq \frac{C_\alpha}{\sigma}\right) &= 1 - \alpha \\ F_Z\left(\frac{C_\alpha}{\sigma}\right) &= 1 - \alpha. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Z 2.4 plyní

$$F_Z\left(z_{1-\alpha} + \frac{\gamma}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1)\right) \doteq \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha.$$

Odtiaľ a z 2.6 dostávame

$$\begin{aligned} \frac{C_\alpha}{\sigma} &\doteq z_{1-\alpha} + \frac{\gamma}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1) \\ C_\alpha &\doteq \sigma\left(z_{1-\alpha} + \frac{\gamma}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1)\right) \end{aligned}$$

a dostávame odhad  $\text{VaR}_\alpha(X)$  v tvare

$$\widehat{\text{VaR}_\alpha(X)} = \sigma\left(z_{1-\alpha} + \frac{\gamma}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1)\right).$$

Na základe tohto vyjadrenia si odvodíme priblíženie  $\text{CVaR}_\alpha(X)$

$$\begin{aligned} \widehat{\text{CVaR}_\alpha(X)} &= \sigma \mathbf{E}\left(\frac{X}{\sigma} \mid \frac{X}{\sigma} \geq z_{1-\alpha} + \frac{\gamma}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1)\right) = \\ &= \sigma \frac{1}{\alpha} \mathbf{E}(ZI_{[Z \geq z_{1-\alpha} + \frac{\gamma}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1)]}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vyjadríme si aproximáciu hustoty  $f_Z$  náhodnej veličiny  $Z$  zderivovaním oboch strán Cornish-Fisherovej aproximácie distribučnej funkcie  $F_Z$  podľa  $y$

$$\begin{aligned} F_Z\left(y + \frac{\gamma}{6}(y^2 - 1)\right) &\doteq \Phi(y) \quad / \frac{\partial}{\partial y} \\ f_Z\left(y + \frac{\gamma}{6}(y^2 - 1)\right)(1 + \frac{\gamma}{3}y) &\doteq \phi(y). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Čitateľ v 2.7 je rovný

$$\sigma \mathbf{E}(ZI_{[Z \geq z_{1-\alpha} + \frac{\gamma}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1)]}) = \sigma \int_{z_{1-\alpha} + \frac{\gamma}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1)}^{\infty} z f_Z(z) dz.$$

Substitúciou  $z = u + \frac{\gamma}{6}(u^2 - 1)$  a s využitím aproximácie 2.8 dostaneme, že výraz je približne rovný

$$\sigma \int_{z_{1-\alpha}}^{\infty} (u + \frac{\gamma}{6}(u^2 - 1)) \phi(u) du.$$

Integráciou per partes dostávame

$$\sigma(\phi(z_{1-\alpha}) + \frac{\gamma}{6}\phi(z_{1-\alpha})z_{1-\alpha}).$$

Celkovo máme vyjadrenie

$$\widehat{\text{CVaR}_\alpha(X)} = \sigma \frac{\phi(z_{1-\alpha})}{\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{6} z_{1-\alpha}\right).$$

Pre jednoduchosť zápisu budeme používať značenie zo Sandstrom (2007)

$$\begin{aligned} k_{V,1-\alpha}(\gamma) &= z_{1-\alpha} + \frac{\gamma}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1) \\ k_{TV,1-\alpha}(\gamma) &= \frac{\phi(z_{1-\alpha})}{\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{6} z_{1-\alpha}\right), \end{aligned}$$

kde  $V$  a  $TV$  v dolných indexoch značí mieru rizika, podľa ktorej sa počíta kapitál. Teda  $V$  pre VaR a  $TV$  pre *Tail Value at Risk* (u nás CVaR).

Aproximatívne vyjadrenia VaR a CVaR použijeme pre jednotlivé straty  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  a aplikujeme na vzorce pre VaR a CVaR z predošlej sekcie. Predpokladáme, že koeficienty šikmosti  $\gamma_i$  náhodných veličín  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sú známe. Koeficient šikmosti  $\gamma_S$  náhodnej veličiny  $S$  nepoznáme.

Pri miere rizika VaR dostávame

$$\begin{aligned} k_{V,1-\alpha}^2(\gamma_S) \sigma_S^2 &= \sum_{i=1}^n k_{V,1-\alpha}^2(\gamma_i) \sigma_i^2 + 2 \sum_{i<j}^n k_{V,1-\alpha}(\gamma_i) k_{V,1-\alpha}(\gamma_j) \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (2.9) \\ \widehat{\text{EC}(S)} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (\text{VaR}_\alpha(X_i))^2 + 2 \sum_{i<j}^n \rho_{ij} \text{VaR}_\alpha(X_i) \text{VaR}_\alpha(X_j)}. \end{aligned}$$

Podobne pri výpočte pomocou CVaR dostaneme vyjadrenie

$$\begin{aligned} k_{TV,1-\alpha}^2(\gamma_S) \sigma_S^2 &= \sum_{i=1}^n k_{TV,1-\alpha}^2(\gamma_i) \sigma_i^2 + 2 \sum_{i<j}^n k_{TV,1-\alpha}(\gamma_i) k_{TV,1-\alpha}(\gamma_j) \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (2.10) \\ \widehat{\text{EC}(S)} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (\text{CVaR}_\alpha(X_i))^2 + 2 \sum_{i<j}^n \rho_{ij} \text{CVaR}_\alpha(X_i) \text{CVaR}_\alpha(X_j)}. \end{aligned}$$

## 2.3 Kalibrácia vzorcov pre normálne rozdelené straty

V tejto sekcii vychádzame z článku Sandstrom (2007). V časti 2.1 sme si odviedli, že rozptyl celkovej straty  $S$  sa vypočíta pomocou

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i<j}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j. \quad (2.11)$$

Výraz 2.11 prenásobíme hodnotou  $k_{V,1-\alpha}^2(\gamma_S)$  a dostávame rovnosť

$$k_{V,1-\alpha}^2(\gamma_S) \sigma_S^2 = k_{V,1-\alpha}^2(\gamma_S) \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 k_{V,1-\alpha}^2(\gamma_S) \sum_{i<j}^n \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j. \quad (2.12)$$

V predošlej sekcii sme si odviedli, že približné vyjadrenia pre jednotlivé kapitály pri miere VaR sú

$$\widehat{\text{EC}(X_i)} = \widehat{\text{VaR}_\alpha(X_i)} = \sigma_i k_{V,1-\alpha}(\gamma_i), i = 1, \dots, n.$$

Aby sme na pravej strane rovnice 2.12 dostali príslušné kapitálové požiadavky, je potrebné ju kalibrovať aplikovaním  $k_{V,1-\alpha}(\gamma_i)$  na jednotlivé kapitály. Dostaneme tak rovnosť

$$\begin{aligned} k_{V,1-\alpha}^2(\gamma_S)\sigma_S^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{k_{V,1-\alpha}^2(\gamma_S)}{k_{V,1-\alpha}^2(\gamma_i)} k_{V,1-\alpha}^2(\gamma_i)\sigma_i^2 \\ &+ 2 \sum_{i<j}^n \rho_{ij} \frac{k_{V,1-\alpha}^2(\gamma_S)}{k_{V,1-\alpha}(\gamma_i)k_{V,1-\alpha}(\gamma_j)} k_{V,1-\alpha}(\gamma_i)\sigma_i k_{V,1-\alpha}(\gamma_j)\sigma_j \\ &= \sum_{i=1}^n f_{V,i}^2 k_{V,1-\alpha}^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i<j}^n \rho_{ij} f_{V,i} k_{V,1-\alpha}(\gamma_i)\sigma_i f_{V,j} k_{V,1-\alpha}(\gamma_j)\sigma_j. \end{aligned}$$

Teda približné vyjadrenie pre ekonomický kapitál je

$$\widehat{EC}(S) = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_{V,i}^2 (\widehat{VaR_\alpha(X_i)})^2 + 2 \sum_{i<j}^n \rho_{ij} f_{V,i} \widehat{VaR_\alpha(X_i)} f_{V,j} \widehat{VaR_\alpha(X_j)}}, \quad (2.13)$$

kde kalibračný faktor  $f_{V,i}$  je rovný

$$f_{V,i} = \frac{k_{V,1-\alpha}(\gamma_S)}{k_{V,1-\alpha}(\gamma_i)} = \frac{z_{1-\alpha} + \frac{\gamma_S}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1)}{z_{1-\alpha} + \frac{\gamma_i}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1)} = \frac{6z_{1-\alpha} + \gamma_S(z_{1-\alpha}^2 - 1)}{6z_{1-\alpha} + \gamma_i(z_{1-\alpha}^2 - 1)}.$$

Podobne sa postupuje pri miere rizika CVaR, kde sa ekonomický kapitál vyjadrí ako

$$\widehat{EC}(S) = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_{TV,i}^2 (\widehat{CVaR_\alpha(X_i)})^2 + 2 \sum_{i<j}^n \rho_{ij} f_{TV,i} \widehat{CVaR_\alpha(X_i)} f_{TV,j} \widehat{CVaR_\alpha(X_j)}}, \quad (2.14)$$

kde kalibračný faktor  $f_{TV,i}$  rovný

$$f_{TV,i} = \frac{k_{TV,1-\alpha}(\gamma_S)}{k_{TV,1-\alpha}(\gamma_i)} = \frac{h_X(z_{1-\alpha})\left(1 + \frac{\gamma_S}{6}z_{1-\alpha}\right)}{h_X(z_{1-\alpha})\left(1 + \frac{\gamma_i}{6}z_{1-\alpha}\right)} = \frac{6 + \gamma_S z_{1-\alpha}}{6 + \gamma_i z_{1-\alpha}}.$$

Koeficient šikmosti  $\gamma_S$  je potrebné vhodne odhadnúť. Sandstrom (2007) používa na aproximáciu  $\gamma_S$  vážený priemer koeficientov  $\gamma_i, i = 1, \dots, n$  s váhami  $w_i = EC(X_i) / \sum_{j=1}^n EC(X_j)$ , teda

$$\hat{\gamma}_S = \sum_{i=1}^n w_i \gamma_i = \frac{\sum_{i=1}^n EC(X_i) \gamma_i}{\sum_{i=1}^n EC(X_i)}.$$

V článku Bolviken a Guillen (2017) sa uvádza, že takáto aproximácia šikmosti bude mať tendenciu nadhodnocovať skutočnú šikmosť náhodnej veličiny  $S$ . To ukazuje nasledujúca poznámka.

*Poznámka.* Nech  $X_i$  sú nezávislé náhodné veličiny s rozptylmi  $\sigma^2, i = 1, \dots, n$ . Nech pre ich koeficienty šikmosti platí  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = \gamma$ . Potom

$$\begin{aligned} \gamma_S &= \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \\ \hat{\gamma}_S &= \gamma. \end{aligned}$$

*Dôkaz.* Z definície koeficientu šikmosti (viď Anděl (2005)) máme

$$\gamma_S = \frac{\mathbb{E}(S - \mathbb{E}(S))^3}{\sigma_S^3} = \frac{\mathbb{E}(S)^3}{\sigma_S^3}.$$

Z nezávislosti  $X_i$  je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S)^3 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^3 &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)^3 + 3 \sum_{i \neq j}^n \mathbb{E}(X_i)^2 \mathbb{E}(X_j) \\ &+ 6 \sum_{i < j < k} \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) \mathbb{E}(X_k). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Z centrovanejosti  $X_i$  sú posledné dva sčítance v 2.15 rovné nule, teda

$$\mathbb{E}(S)^3 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)^3.$$

Ďalej pre nezávislé náhodné veličiny je  $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$ , teda

$$\begin{aligned} \sigma_S^2 &= \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) + 2 \sum_{i < j}^n \text{cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) = \sum_{i=1}^n \sigma^2 = n\sigma^2. \end{aligned}$$

Koeficient šikmosti  $\gamma$  je rovný

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}(X_i)^3}{\sigma^3}, i = 1, \dots, n.$$

Celkovo dostávame vyjadrenie

$$\gamma_S = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)^3}{(n\sigma^2)^{3/2}} = \frac{n\gamma\sigma^3}{n^{3/2}\sigma^3} = \frac{\gamma}{\sqrt{n}}.$$

Pre odhad  $\hat{\gamma}_S$  máme

$$\hat{\gamma}_S = \gamma \frac{\sum_{i=1}^n \text{EC}(X_i)}{\sum_{i=1}^n \text{EC}(X_i)} = \gamma.$$

□



### 3. Logaritmicko-normálna aproximácia

Ďalším z prístupov je modelovať jednotlivé riziká ako náhodné veličiny s logaritmicko-normálnym rozdelením. Uvedieme si jeho definíciu (viď Mazurová a Mandl, 1999).

**Definícia 6.** *Nech náhodná veličina  $X$  má normálne rozdelenie  $N(\mu, \sigma^2)$ . Potom náhodná veličina  $Y = e^X$  má logaritmicko-normálne (lognormálne) rozdelenie.*

Predpokladáme, že  $X_i$  sú centrovane náhodné veličiny s rozptylmi  $\sigma_i^2$ , koeficientmi šikmosti  $\gamma_i$  a koeficientmi korelácie  $\rho_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ . Tieto charakteristiky má nasledujúci model lognormálneho rozdelenia, s ktorým pracuje Bolviken a Guillen (2017)

$$X_i = \sigma_i \frac{e^{-\tau_i^2/2 + \tau_i \varepsilon_i} - 1}{(e^{\tau_i^2} - 1)^{1/2}}, \quad (3.1)$$

kde  $\tau_i$  je parameter, závislý na šikmosti a  $\varepsilon_i$  má normálne rozdelenie  $N(0,1)$ .

Vyjadríme si hustotu náhodných veličín v 3.1. Označme  $Y_i := e^{-\tau_i^2/2 + \tau_i \varepsilon_i}$ . Potom s využitím definície 6 a vlastností normálneho rozdelenia máme

$$\ln(Y_i) \sim N(-\tau_i^2/2, \tau_i^2),$$

teda pre distribučnú funkciu  $F_{Y_i}$  náhodných veličín  $Y_i$  a pre  $y > 0$  platí

$$\begin{aligned} F_{Y_i}(y) &= P(Y_i \leq y) = P(\ln(Y_i) \leq \ln(y)) = \\ &= P\left(\frac{1}{\tau_i}(\ln(Y_i) + \tau_i^2/2) \leq \frac{1}{\tau_i}(\ln(y) + \tau_i^2/2)\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\tau_i}(\ln(y) + \tau_i^2/2)\right). \end{aligned}$$

Hustotu  $f_{Y_i}$  náhodnej veličiny  $Y_i$  dostaneme zderivovaním podľa  $y$

$$\begin{aligned} F_{Y_i}(y) &= \Phi\left(\frac{1}{\tau_i}(\ln(y) + \tau_i^2/2)\right) \quad / \frac{\partial}{\partial y} \\ f_{Y_i}(y) &= \frac{1}{\tau_i y} \phi\left(\frac{1}{\tau_i}(\ln(y) + \tau_i^2/2)\right), \end{aligned}$$

takže hustota  $f_{Y_i}$  náhodnej veličiny  $Y_i$  má tvar

$$f_{Y_i}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_i y}} \exp\left\{-\frac{(\ln(y) - (-\tau_i^2/2))^2}{2\tau_i^2}\right\}, \quad y > 0.$$

Označme  $\tilde{\sigma}_i := \sigma_i / \sqrt{e^{\tau_i^2} - 1}$ . Distribučná funkcia  $F_{X_i}$  náhodnej veličiny  $X_i$  sa potom vyjadrí ako

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x) &= \mathbf{P}(X_i \leq x) = \mathbf{P}\left(\frac{X_i}{\tilde{\sigma}_i} + 1 \leq \frac{x}{\tilde{\sigma}_i} + 1\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(Y_i \leq \frac{x}{\tilde{\sigma}_i} + 1\right) = F_{Y_i}\left(\frac{x}{\tilde{\sigma}_i} + 1\right). \end{aligned}$$

A hustotu  $f_{X_i}$  náhodnej veličiny  $X_i$  dostaneme zderivovaním  $F_{X_i}$  podľa  $x$ , to znamená

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x) &= F_{Y_i}\left(\frac{x}{\tilde{\sigma}_i} + 1\right) \quad / \frac{\partial}{\partial x} \\ f_{X_i}(x) &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_i} f_{Y_i}\left(\frac{x}{\tilde{\sigma}_i} + 1\right), \quad x > -\tilde{\sigma}_i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dokážeme si nasledujúcu poznámku, ktorá ukazuje závislosť šikmosti na parametri  $\tau$ . S  $\tau_i$  blížiacim sa k nule sa náhodná veličina  $X_i$  z nášho modelu približuje k náhodnej veličine s rozdelením  $N(0, \sigma_i^2)$  s pravdepodobnosťou rovnou jednej.

*Poznámka.* Pre náhodnú veličinu  $X_i$  v 3.1 platí  $\lim_{\tau_i \rightarrow 0} X_i = \sigma_i \varepsilon_i$  s pravdepodobnosťou jedna.

V dôkazoch pre väčšiu prehľadnosť vynechávame indexy náhodných veličín  $X_i$ ,  $\varepsilon_i$ , ich popisných charakteristík a ostatných parametrov. To znamená, že píšeme  $\tau$  miesto  $\tau_i$  a podobne.

*Dôkaz.* Použitím l'Hospitalovho pravidla a elementárnymi úpravami dostávame

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} X &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma \frac{e^{-\tau^2/2 + \tau\varepsilon} - 1}{(e^{\tau^2} - 1)^{1/2}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma \frac{e^{-\tau^2/2 + \tau\varepsilon}(-\tau + \varepsilon)}{2\tau e^{\tau^2}} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \sigma \left( \frac{e^{\tau^2} - 1}{\tau^2} \right)^{1/2} \frac{1}{e^{\tau^2}} e^{-\frac{\tau^2}{2} + \tau\varepsilon}(-\tau + \varepsilon) = \sigma\varepsilon. \end{aligned}$$

□

V nasledujúcej vete si ukážeme, že 3.1 sú centrované náhodné veličiny s rozptylmi  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  a tiež ukážeme prechod od parametru  $\tau_i$  ku  $\gamma_i$  a opačne. Veta sa v článku Bolviken a Guillen (2017) nachádza so stručným dôkazom. My si ju odvodíme podrobnejšie s využitím momentovej vytvárajúcej funkcie, ktorú definujeme podľa knihy Mazurová a Mandl (1999).

**Definícia 7.** *Momentová vytvárajúca funkcia náhodnej veličiny  $X$  je definovaná vzťahom*

$$M_X(r) = E e^{Xr},$$

pre také  $r$ , pre ktoré je stredná hodnota vpravo konečná.

**Veta 1.** Pre náhodnú veličinu  $X_i$  v 3.1 platí

$$\begin{aligned}
(i). E(X_i) &= 0, \text{var}(X_i) = \sigma_i^2 \\
(ii). \gamma_i &= (e^{\tau_i^2} + 2)\sqrt{e^{\tau_i^2} - 1} \\
(iii). \tau_i &= \sqrt{\log(A_i + A_i^{-1} - 1)}, \\
\text{kde } A_i &= \left(1 + \gamma_i^2/2 - \sqrt{\gamma_i^4/4 + \gamma_i^2}\right)^{1/3}.
\end{aligned}$$

*Dôkaz.* Momentová vytvárajúca funkcia náhodnej veličiny  $\xi$  s normálnym rozdelením  $N(\mu, \sigma^2)$  je  $M_\xi(r) = E(e^{r\xi}) = e^{r\mu + \frac{r^2}{2}\sigma^2}$  (viď Mazurová a Mandl, 1999). Teda pre náhodnú veličinu  $\varepsilon$  s normálnym rozdelením  $N(0,1)$  máme  $M_\varepsilon(\tau) = E(e^{\tau\varepsilon}) = e^{\tau \cdot 0 + \frac{\tau^2}{2} \cdot 1^2} = e^{\tau^2/2}$ . Podobne dostaneme, že  $M_\varepsilon(2\tau) = E(e^{2\tau\varepsilon}) = e^{4\tau^2/2} = e^{2\tau^2}$  a  $M_\varepsilon(3\tau) = E(e^{3\tau\varepsilon}) = e^{9\tau^2/2}$ . Označme teraz  $Y = e^{-\tau^2/2 + \tau\varepsilon}$ . S využitím znalosti momentovej vytvárajúcej funkcie a základných vlastností strednej hodnoty si najskôr spočítame momenty náhodnej veličiny  $Y$ .

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(e^{-\tau^2/2} e^{\tau\varepsilon}) = e^{-\tau^2/2} E(e^{\tau\varepsilon}) \\
&= e^{-\tau^2/2} e^{\tau^2/2} = 1 \\
E(Y^2) &= E(e^{-\tau^2 + 2\tau\varepsilon}) = e^{-\tau^2} E(e^{2\tau\varepsilon}) \\
&= e^{-\tau^2} e^{2\tau^2} = e^{\tau^2} \\
E(Y^3) &= E(e^{-3\tau^2/2 + 3\tau\varepsilon}) = e^{-3\tau^2/2} E(e^{3\tau\varepsilon}) \\
&= e^{-3\tau^2/2} e^{9\tau^2/2} = e^{3\tau^2}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Odtiaľ potom dostávame

$$\text{var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = e^{\tau^2} - 1.$$

Odtiaľ, z 3.3 a zo základných vlastností strednej hodnoty a rozptylu plynie (i).

ad (ii). Koeficient šikmosti náhodnej veličiny  $X$  je definovaný vzťahom (viď Anděl, 2005)

$$\gamma = \frac{E(X - E(X))^3}{\text{var}(X)^{3/2}} = \frac{E(X^3)}{\sigma^3},$$

kde  $E(X^3)$  dostaneme ako

$$\begin{aligned}
E(X^3) &= \frac{\sigma^3}{(e^{\tau^2} - 1)^{3/2}} E(Y^3 - 3Y^2 + 3Y - 1) \\
&= \frac{\sigma^3}{(e^{\tau^2} - 1)^{3/2}} (e^{3\tau^2} - 3e^{\tau^2} + 3 - 1).
\end{aligned}$$

Teda celkovo pre  $\gamma$  dostávame vzťah

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{e^{3\tau^2} - 3e^{\tau^2} + 2}{(e^{\tau^2} - 1)^{3/2}} \\
&= \frac{(e^{\tau^2} - 1)^2 (e^{\tau^2} + 2)}{(e^{\tau^2} - 1)^{3/2}} \\
&= (e^{\tau^2} + 2)\sqrt{e^{\tau^2} - 1}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ad (iii). Parameter  $\tau$  si vyjadríme pomocou koeficientu šikmosti  $\gamma$ . Označme  $q = e^{\tau^2}$ . Z rovnosti 3.4 dostávame rovnicu 3. stupňa

$$(q + 2)^2(q - 1) - \gamma^2 = 0.$$

Z Cardanovych vzorcov je jej jediným reálnym koreňom (viď Mazurová a Mandl, 1999)

$$\begin{aligned} q &= (1 + \gamma^2/2 - \sqrt{(1 + \gamma^2/2)^2 - 1})^{1/3} + (1 + \gamma^2/2 + \sqrt{(1 + \gamma^2/2)^2 - 1})^{1/3} - 1 \\ &= (1 + \gamma^2/2 - \sqrt{\gamma^2/4 + \gamma^2})^{1/3} + (1 + \gamma^2/2 + \sqrt{\gamma^2/4 + \gamma^2})^{1/3} - 1 \\ &= A + A^{-1} - 1. \end{aligned}$$

Odtiaľ potom

$$\tau = \sqrt{\log q} = \sqrt{\log(A + A^{-1} - 1)}.$$

□

Naším cieľom je nájsť aproximáciu rozdelenia náhodnej veličiny  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  v tvare

$$S = \sigma_S \frac{e^{-\tau_S^2/2 + \tau_S \varepsilon_S} - 1}{(e^{\tau_S^2} - 1)^{1/2}}, \quad (3.5)$$

kde  $\varepsilon_S \sim N(0,1)$ . Rozptyl  $\sigma_S^2$  sa určí ako v 2.1, teda

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j. \quad (3.6)$$

Z vety 1 dostávame prechod od  $\gamma_S$  ku  $\tau_S$ . Bolviken a Guillen (2017) odvodili vyjadrenie pre  $\gamma_S$ , ktoré si uvedieme v nasledujúcej vete.

**Veta 2.** *Nech  $X_i$ ,  $i=1, \dots, n$  majú rozdelenie 3.1. Koeficient šikmosti  $\gamma_S$  ich súčtu  $S$  je daný vzťahom*

$$\begin{aligned} \gamma_S &= \sum_i \alpha_i^3 (e^{\tau_i^2} + 2)(e^{\tau_i^2} - 1)^2 \\ &+ 3 \sum_{i \neq j} \alpha_i^2 \alpha_j \{e^{\tau_i^2} (\beta_{ij}^2 - 1) - 2(\beta_{ij} - 1)\} \\ &+ 6 \sum_{i < j < k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \{\beta_{ij} \beta_{ik} \beta_{jk} - \beta_i - \beta_j - \beta_k + 2\}, \\ \text{kde } \alpha_i &= \frac{\sigma_i}{\sigma_S \sqrt{e^{\tau_i^2} - 1}}, \\ \beta_{ij} &= 1 + \rho_{ij} \sqrt{(e^{\tau_i^2} - 1)(e^{\tau_j^2} - 1)}. \end{aligned}$$

*Dôkaz.* Podrobné odvodenie sa nachádza v článku (str.25, Bolviken a Guillen, 2017).

□

Predošlé výsledky zhrnieme v nasledujúcom algoritme na nájdenie parametrov  $\sigma_S$  a  $\tau_S$ .

## Základný algoritmus

Nech sú dané rozptyly  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ , koeficienty šikmosti  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  a koeficienty korelácie  $\rho_{ij} = \text{cor}(X_i, X_j)$  náhodných veličín  $X_i$  s rozdelením 3.1,  $i, j = 1, \dots, n$ .

1. Preveď  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  na  $\tau_1, \dots, \tau_n$  aplikáciou vety 1. (iii).
2. Preveď  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$  na  $\sigma_S^2$  pomocou 3.6.
3. Použi výsledky z 1. a 2. kroku na vetu 2. a vypočítaj  $\gamma_S$ .
4. Preveď  $\gamma_S$  z 3. kroku na  $\tau_S$  aplikáciou vety 1. (iii).

Odvodíme si  $(1 - \alpha)$ -kvantil náhodnej veličiny s rozdelením 3.5. Nech  $\tilde{\sigma}_S = \sigma_S / \sqrt{e^{\tau_S^2} - 1}$ . Označme  $\zeta_S(y) = \ln(\frac{y}{\tilde{\sigma}_S} + 1)$ . Pre  $\alpha \in (0, 1)$  hľadáme  $C_S$  také, že platí

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S \leq C_S) &= 1 - \alpha \\ \mathbb{P}(\zeta_S(S) \leq \zeta_S(C_S)) &= 1 - \alpha \\ \Phi(\zeta_S(C_S)) &= 1 - \alpha \\ \zeta_S(C_S) &= z_{1-\alpha}, \quad C_S > -\tilde{\sigma}_S. \end{aligned}$$

Pre  $y > -\tilde{\sigma}_S$  máme  $\zeta_S^{-1}(y) = \tilde{\sigma}_S(e^{-\tau_S^2/2 + \tau_S \epsilon_S} - 1)$ . Dostávame vyjadrenie kapitálu na základe miery rizika VaR pri hladine  $\alpha$

$$\text{VaR}_\alpha(S) = C_S = \zeta_S^{-1}(z_{1-\alpha}) = \sigma_S \frac{e^{-\tau_S^2/2 + \tau_S z_{1-\alpha}} - 1}{(e^{\tau_S^2} - 1)^{1/2}}. \quad (3.7)$$

Nakoniec si odvodíme  $\text{CVaR}_\alpha(S)$  na základe znalosti hustoty  $f_S$  náhodnej veličiny  $S$ , ktorá sa dostane ako v 3.2 a má tvar

$$f_S(x) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_S} f_{Y_S}\left(\frac{x}{\tilde{\sigma}_S} + 1\right), \quad x > -\tilde{\sigma}_S,$$

kde  $Y_S = e^{-\tau_S^2/2 + \tau_S \epsilon_S}$  a  $\tilde{\sigma}_S$  je ako vyššie.

Ako sme si odvodili v kapitole 1 (viď 1.3), pre  $\alpha \in (0, 1)$  je

$$\text{CVaR}_\alpha(S) = \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(SI_{[S \geq C_S]}), \quad (3.8)$$

kde

$$\mathbb{E}(SI_{[S \geq C_S]}) = \int_{C_S}^{\infty} x f_S(x) dx. \quad (3.9)$$

Ďalej poznamenajme, že integrál v 3.9 je dobre definovaný, pretože

$$C_S = \tilde{\sigma}_S(e^{-\tau_S^2/2 + \tau_S \epsilon_S} - 1)$$

a  $C_S > -\tilde{\sigma}_S$  práve vtedy, keď  $e^{-\tau_S^2/2 + \tau_S \epsilon_S} > -1$ , čo je splnené vždy.

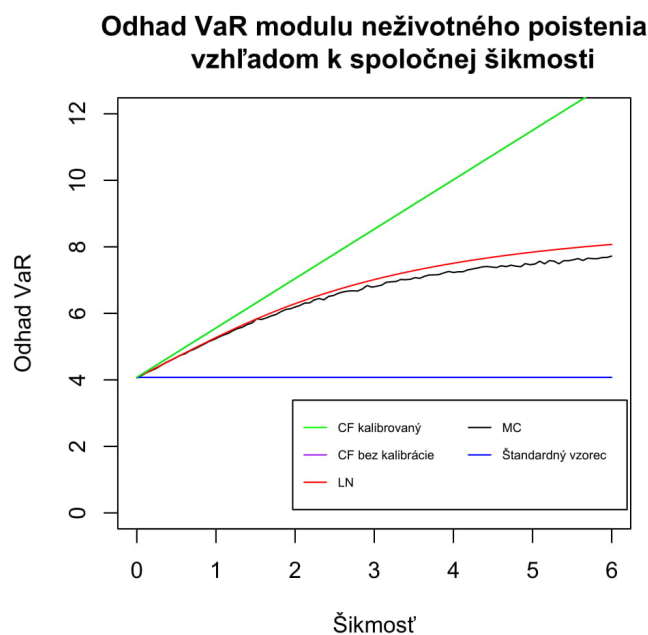
## 4. Numerická štúdia

Všetky numerické výpočty boli prevedené v programe R. Použité korelačné matice a tabuľky z výpočtov sa nachádzajú v prílohe.

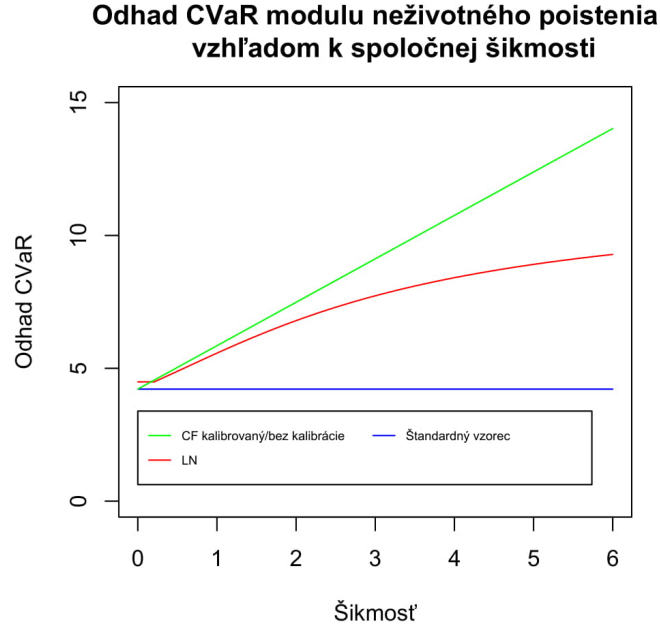
*Značenie.* Pre  $n \in \mathbb{N}$  značíme  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)^\top, \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^\top$ .

Na vykreslenie približne presného riešenia a pre porovnanie presnosti metód pri miere VaR bolo použitých  $10^6$  Monte Carlo simulácií. Simulovali sa náhodné veličiny z lognormálneho modelu 3.1 z kapitoly 3. Ekonomický kapitál pri miere rizika VaR sa počítal na hladine  $\alpha = 0.005$ . Podľa Sandstrom (2007) hodnota kapitálu, vypočítaná pomocou miery VaR na hladine  $\alpha = 0.005$  približne zodpovedá hodnote kapitálu, vypočítanej pomocou miery CVaR na hladine  $\alpha = 0.01$ . Ekonomický kapitál sme preto pri miere CVaR počítali na hladine  $\alpha = 0.01$ . Farebne sú na obrázkoch jednotlivé metódy rozlíšené nasledovne:

- vzorec pre normálne rozdelené straty (viď 2.2, 2.3, budeme tiež písať štandardný vzorec) – modrá
- CF bez použitia kalibračných faktorov (viď 2.9, 2.10) – fialová
- Cornish-Fisher (ďalej CF) s použitím kalibračných faktorov (viď 2.13, 2.14) – zelená
- logaritmicko-normálna aproximácia (viď 3.7, 3.8, ďalej LN) – červená
- Monte Carlo simulácie (MC) – čierna.



Obr. 4.1: Odhad  $\text{VaR}_\alpha(S)$  vzhľadom k šikmosti pre  $\alpha = 0.005$  a  $\boldsymbol{\sigma} = (1, 0.05, 1)^\top$ . Korelácie stanovené ako v A.3.



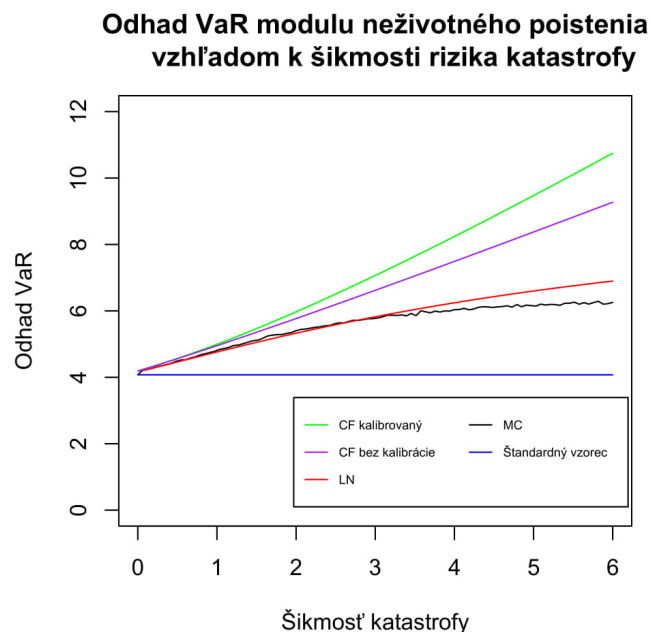
Obr. 4.2: Odhad  $\text{CVaR}_\alpha(S)$  vzhľadom k šikmosti pre  $\alpha = 0.01$  a  $\sigma = (1, 0.05, 1)^\top$ . Korelácie stanovené ako v A.3.

Pri výpočtoch sme sa inšpirovali modelom poisťovne z EIOPA (2014). Celkové riziko, ktorému je poisťovňa vystavená, sa podľa EIOPA (2014) delí na niekoľko rizikových modulov a podmodulov.

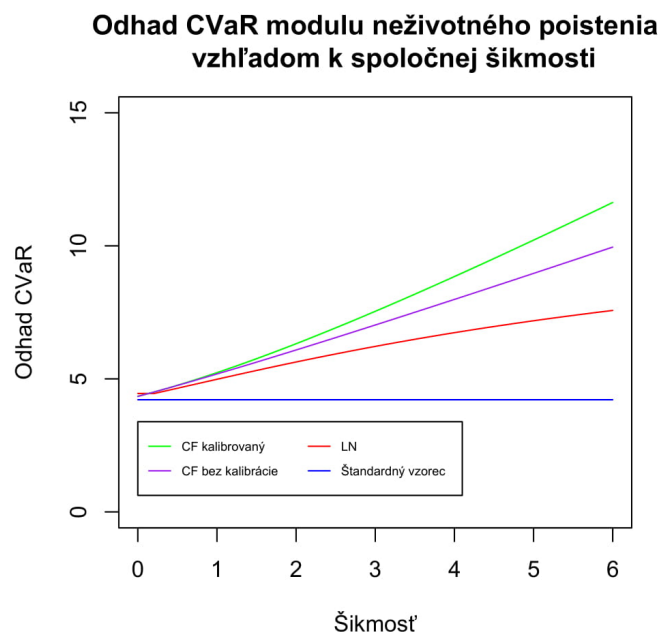
Najskôr sme sa zamerali na rizikový modul neživotného poistenia. Podľa EIOPA (2014) do tohto modulu patria po poradí riziká: poistné a rezervy, storná, katastrofy. Korelácie boli stanovené ako v A.3. Smerodajné odchýlky boli nastavené ako v Bolviken a Guillen (2017), teda  $\sigma_1 = \sigma_3 = 1$ ,  $\sigma_2 = 0.05$ . Porovnávané boli kapitály vzhľadom ku spoločnej šikmosti  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$  (viď Obrázok 4.1 a Tabuľka A.2 pre VaR a Obrázok 4.2 a Tabuľka A.1 pre CVaR). Šikmosti prebiehali intervalom  $(0, 6]$ . LN aproximácia sa ukázala ako veľmi presná. Ďalej je vidieť, že kapitál, počítaný pomocou CF metódy, je pre veľké šikmosti značne nadhodnotený, ako sme naznačili v poznámke 2.3. Nakoľko kalibračný faktor je pre  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$  rovný jednej, jeho použitie v CF metóde nemá na výsledný kapitál žiadny vplyv. Názorné je tiež, že kapitál, počítaný pomocou štandardného vzorca, nezávisí na meniacej sa šikmosti.

Ďalej sme počítali kapitál s pevným  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.15$  vzhľadom k šikmosti rizika katastrofy  $\gamma_3$  (viď Obrázok 4.3 a Tabuľka A.4 pre VaR a Obrázok 4.4 a Tabuľka A.3 pre CVaR). Šikmost  $\gamma_3$  prebiehala intervalom  $(0, 6]$ . Viditeľný je aj vplyv kalibračných faktorov v CF metóde, ktorý rástol s rastúcou šikmostou (viď Obrázok 4.5 pre VaR). Vplyvom kalibračných faktorov rozumieme absolútnu odchýlku odhadu VaR, získaného CF metódou bez kalibračných faktorov, od odhadu VaR, získaného CF metódou s kalibračnými faktormi, vyjadrenú v percentách.

Nakoniec sme počítali absolútne odchýlky odhadov VaR, získaných výpočtom pomocou jednotlivých metód, od  $(1 - \alpha)$ -kvantilu  $10^6$  Monte Carlo simulácií. Počítali sme pre  $n = 6$  (viď Obrázok 4.6, Obrázok 4.7 a Tabuľka A.5) a  $n = 12$  rizík



Obr. 4.3: Odhad  $\text{VaR}_\alpha(S)$  vzhľadom k šikmosti katastrofy pre  $\alpha = 0.005$ ,  $\sigma = (1, 0.05, 1)^\top$ ,  $\gamma = (0.15, 0.15, \gamma_3)^\top$ ,  $\gamma_3$  sa mení v  $(0, 6]$ . Korelácie stanovené ako v A.3

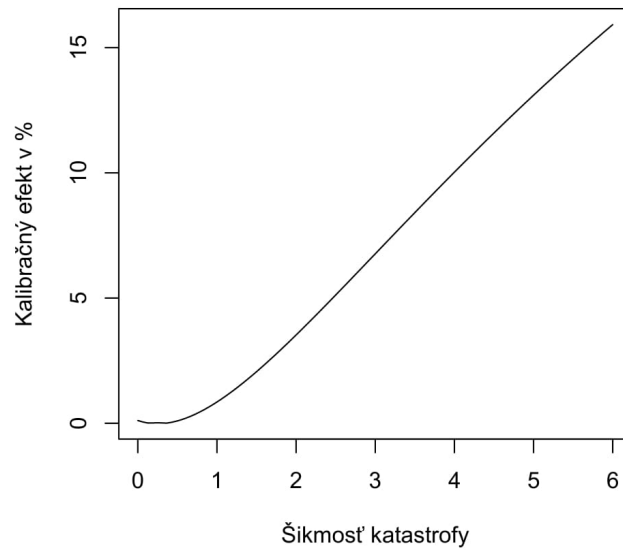


Obr. 4.4: Odhad  $\text{CVaR}_\alpha(S)$  vzhľadom k šikmosti pre  $\alpha = 0.01$  a  $\sigma = (1, 0.05, 1)^\top$ . Korelácie stanovené ako v A.3.

(viď Obrázok 4.8 a Tabuľka A.6). Pre  $n = 6$  sme použili korelačnú maticu modulu tržného rizika A.1. Pre  $n = 12$  sme použili korelačnú maticu podrizík rizika poistné a rezervy A.2. Veľkými rizikami sme rozumeli riziká  $X_i$  s hodnotami  $\sigma_i=4$  a  $\gamma_i=5$ . Ostatné riziká mali hodnoty parametrov nastavené na  $\sigma_i=1$  a  $\gamma_i=0.5$ .

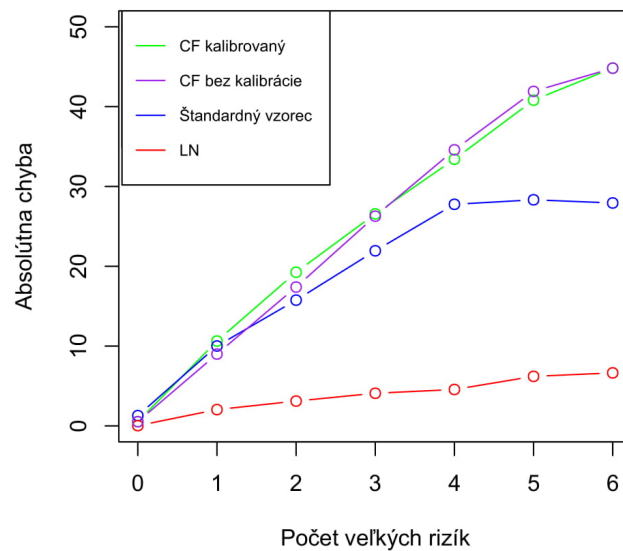


**Kalibračný efekt CF metódy v % pri miere VaR**



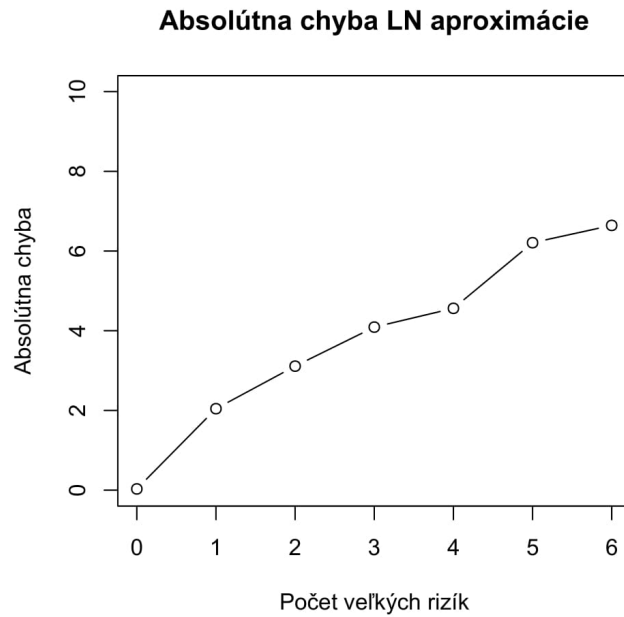
Obr. 4.5: Vplyv kalibračných faktorov CF metódy pri miere VaR na hladine  $\alpha = 0.005$ .  $\sigma = (1, 0.05, 1)^\top$ ,  $\gamma = (0.15, 0.15, \gamma_3)^\top$ ,  $\gamma_3$  sa mení v  $(0, 6]$ . Korelácie stanovené ako v A.3.

**Absolútna chyba odhadov VaR vzhľadom k počtu veľkých rizík**

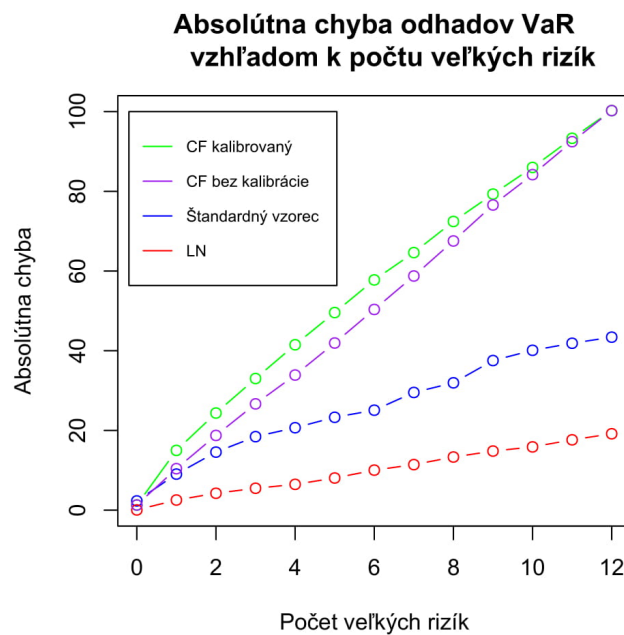


Obr. 4.6: Absolútna odchýlka odhadov VaR od  $(1 - \alpha)$ -kvantilu  $10^6$  Monte Carlo simulácií pre  $\alpha = 0.005$  a  $n = 6$ . Veľké riziká s parametrami  $\sigma_i = 4, \gamma_i = 5$ , ostatné  $\sigma_i = 1, \gamma_i = 0.5$ . Korelácie stanovené ako v A.1.

Najnižšiu odchýlku od presného riešenia dosahovala logaritmicko-normálna aproximácia, ktorej absolútna chyba neprevýšila hodnotu  $10^1$  pre  $n = 6$ . Naopak Cornish-Fisherova metóda vykazovala horšie výsledky, v kalibrovanej (teda s po-



Obr. 4.7: Absolútna odchýlka odhadu  $\text{VaR}_\alpha(S)$ , vypočítaného pomocou LN aproximácie, od  $(1 - \alpha)$ -kvantilu  $10^6$  Monte Carlo simulácií pre  $\alpha = 0.005$  a  $n = 6$ . Veľké riziká  $X_i$  s parametrami  $\sigma_i = 4, \gamma_i = 5$ , ostatné  $\sigma_i = 1, \gamma_i = 0.5$ . Korelácie stanovené ako v A.1.



Obr. 4.8: Absolútna odchýlka odhadov  $\text{VaR}_\alpha(S)$  od  $(1 - \alpha)$ -kvantilu  $10^6$  Monte Carlo simulácií pre  $\alpha = 0.005$  a  $n = 12$ . Veľké riziká  $X_i$  s parametrami  $\sigma_i = 4, \gamma_i = 5$ , ostatné  $\sigma_i = 1, \gamma_i = 0.5$ . Korelácie stanovené ako v A.2.

užitím kalibračných faktorov), aj nekalibrovannej verzii. So zväčšujúcim sa počtom veľkých rizík sa presnosť všetkých metód znižovala.

# Záver

Predmetom tejto bakalárskej práce bolo vysvetlenie a porovnanie rozličných prístupov zohľadňovania šikmosti pri výpočte ekonomického kapitálu pri mierach rizika VaR a CVaR. V prvej kapitole sme si definovali ekonomický kapitál a uviedli základný vzorec pre jeho výpočet na základe miery rizika. Definovali sme si miery rizika VaR a CVaR. Ukázali sme si, že pri výpočte ekonomického kapitálu pri mierach rizika VaR a CVaR stačí pracovať s centrovanými náhodnými veličinami a odvodili sme si CVaR pre náhodnú veličinu so štandardným normálnym rozdelením.

V druhej kapitole sme najskôr uvažovali normálne rozdelené straty a odvodili sme si presné vyjadrenia pre ekonomický kapitál ich súčtu pri mierach rizika VaR a CVaR. Popísali sme Cornish-Fisherovu aproximáciu ako v Mazurová a Mandl (1999), na základe ktorej sme odvodili aproximáciu  $(1 - \alpha)$ -kvantilu strát kvantilom  $N(0,1)$  rozdelenia, ktorý využíva koeficient šikmosti. Získanú aproximáciu sme potom použili pre odvodenie odhadov VaR a CVaR. Pri odvodzovaní CVaR sme dospeli k rozdielnemu vyjadreniu, než s akým sa pracuje v článku Sandstrom (2007), v ktorom sa toto odvodenie nenachádza. Odvodenie CVaR pomocou Cornish-Fisherovej aproximácie sme nenašli ani v žiadnej inej dostupnej literatúre. Aproximácie VaR a CVaR sme aplikovali na vzorec pre normálne rozdelené straty. Popísali sme úpravu vzorcov pre normálne rozdelené straty s využitím kalibračných faktorov a Cornish-Fisherovej aproximácie ako v Sandstrom (2007).

V tretej kapitole sme pracovali so stratami z lognormálneho modelu. Odvodili sme si hustotu náhodných veličín s týmto rozdelením, ktorú sme potrebovali pre vyjadrenie CVaR, a dokázali sme si niektoré ich vlastnosti. Uviedli sme dve vety z Bolviken a Guillen (2017), ktoré sa týkali šikmosti a jednu z nich sme dokázali. S využitím týchto viet sme na základe článku Bolviken a Guillen (2017) odvodili algoritmus pre určenie rozdelenia súčtu strát. Výsledky sme použili na odvodenie odhadov VaR a CVaR.

Jednotlivé prístupy sme porovnávali v numerickej štúdii v štvrtej kapitole. Pri miere VaR sme na porovnanie presnosti metód použili Monte Carlo simulácie náhodných veličín z lognormálneho modelu z tretej kapitoly. Porovnávali sme odhady VaR súčtu troch rizík modulu neživotného poistenia vzhľadom k spoločnej šikmosti a vzhľadom k šikmosti tzv. rizika katastrofy ako v Bolviken a Guillen (2017) s tým rozdielom, že sme do výpočtu zahrnuli aj nekalibrovanú verziu Cornish-Fisherovho vzorca pre VaR. Ďalej sme porovnávali absolútne odchýlky odhadov VaR od Monte Carlo simulácií pre rôzny počet rizík. Pri miere CVaR sme tak ako pri VaR porovnávali odhady CVaR súčtu troch rizík vzhľadom k šikmosti rizika katastrofy. Výsledky ukázali, že logaritmicko-normálna aproximácia súčtu strát, odvodená v tretej kapitole, je veľmi blízko aproximácie, získanej Monte Carlo simuláciami. Tiež sa ukázalo, že vzorce, odvodené pomocou Cornish-Fisherovej aproximácie, majú pri aproximácii šikmosti súčtu váženým priemerom tendenciu nadhodnocovať výsledný ekonomický kapitál. Použitie kalibračných faktorov ekonomický kapitál navýšilo. Presnosť všetkých metód sa s rastúcou šikmostou znižovala.

# Zoznam použitej literatúry

- ANDĚL, J. (2005). *Základy matematické statistiky*. Vydání první. MATFYZPRESS, Praha. ISBN 80-86732-40-1.
- BOLVIKEN, E. a GUILLEN, M. (2017). Risk aggregation in solvency ii through recursive log-normals. *Insurance: Mathematics and Economics*, **73**, 20–26.
- EIOPA (2014). Technical specification for the preparatory phase (part i). [https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/A\\_-\\_Technical\\_Specification\\_for\\_the\\_Preparatory\\_Phase\\_\\_Part\\_I\\_.pdf](https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/A_-_Technical_Specification_for_the_Preparatory_Phase__Part_I_.pdf) (04.07.2018).
- GAIVORONSKI, A. A. a PFLUG, G. (2004-2005). Value at risk in portfolio optimization: Properties and computational approach. *Journal of Risk*, **7**(2), 1–31.
- KLUGMAN, S., PANJER, H. a WILLMOT, G. (2004). *Loss Models. From Data to Decisions*. Second Edition. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey. ISBN 0-471-21577-5.
- MAZUROVÁ, L. a MANDL, P. (1999). *Matematické základy neživotného pojištění*. Vydání první. MATFYZPRESS, Praha. ISBN 80-85863-42-1.
- MCNEIL, A., FREY, R. a EMBRECHTS, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540. ISBN 0-691-12255-5.
- SANDSTROM, A. (2007). Solvency ii: Calibration for skewness. *Scandinavian Actuarial Journal*, (2), 126–134.

# A. Prílohy

## A.1 Numerická štúdia – tabuľky

$\gamma$	Lognorm. <sup>1</sup>	Cornish-Fisher <sup>2</sup>
0.21	4,49	4,55
0.41	4,77	4,89
0.62	5,05	5,23
0.83	5,34	5,57
1.03	5,62	5,91
1.24	5,89	6,25
1.45	6,15	6,58
1.66	6,40	6,92
1.86	6,64	7,26
2.07	6,87	7,60
2.28	7,08	7,94
2.48	7,28	8,27
2.69	7,47	8,61
2.89	7,65	8,95
3.10	7,81	9,29
3.31	7,96	9,63
3.52	8,11	9,97
3.72	8,24	10,30
3.93	8,37	10,64
4.14	8,49	10,98
4.34	8,60	11,32
4.55	8,71	11,66
4.76	8,80	11,99
4.97	8,90	12,33
5.17	8,98	12,67
5.38	9,07	13,01
5.59	9,14	13,35
5.79	9,22	13,69
6.00	9,23	14,02

Pozn: <sup>1</sup> Lognormálna aproximácia (viď 3.8)

<sup>2</sup> Cornish-Fisher kalibrovaný/nekalibrovaný (viď 2.10, 2.14)

Pre normálne rozdelené straty (viď 2.3) je  $\text{CVaR}_\alpha(S) = 4.22$  pre  $\gamma \in (0,6]$ .

Tabuľka A.1: Odhad  $\text{CVaR}_\alpha(S)$  vzhľadom k šikmosti  $\gamma$  pre  $\alpha = 0.01$  a  $\sigma = (1, 0.05, 1)^\top$ . Korelácie stanovené ako v A.3.

$\gamma$	Lognorm. <sup>1</sup>	Cornish-Fisher <sup>2</sup>	Monte Carlo <sup>3</sup>
0.21	4,32	4,38	4,32
0.41	4,57	4,69	4,56
0.62	4,82	4,99	4,82
0.83	5,07	5,30	5,06
1.03	5,31	5,61	5,31
1.24	5,55	5,92	5,48
1.45	5,77	6,23	5,71
1.66	5,97	6,53	5,89
1.86	6,17	6,84	6,11
2.07	6,35	7,15	6,22
2.28	6,52	7,46	6,37
2.48	6,68	7,76	6,54
2.69	6,82	8,07	6,65
2.89	6,95	8,38	6,78
3.10	7,08	8,69	6,89
3.31	7,19	8,99	6,98
3.52	7,29	9,30	7,06
3.72	7,39	9,61	7,15
3.93	7,48	9,91	7,21
4.14	7,56	10,22	7,24
4.34	7,64	10,53	7,31
4.55	7,71	10,84	7,44
4.76	7,77	11,14	7,44
4.97	7,83	11,45	7,48
5.17	7,89	11,76	7,59
5.38	7,94	12,07	7,60
5.59	7,99	12,37	7,61
5.79	8,03	12,68	7,67
6.00	8,07	12,99	7,65

Pozn: <sup>1</sup> Lognormálna aproximácia (viď 3.7)

<sup>2</sup> Cornish-Fisher kalibrovaný/nekalibrovaný(viď 2.9, 2.13)

<sup>3</sup> Monte Carlo simulácie

Pre normálne rozdelené straty (viď 2.2) je  $\text{VaR}_\alpha(S) = 4.07$  pre  $\gamma \in (0,6]$ .

Tabuľka A.2: Odhad  $\text{VaR}_\alpha(S)$  vzhľadom k spoločnej šikmosti  $\gamma$  pre  $\alpha = 0.005$  a  $\sigma = (1, 0.05, 1)^\top$ . Korelácie stanovené ako v A.3.

$\gamma_3$	Lognorm.	CF nekalibr. <sup>1</sup>	CF kalibr. <sup>2</sup>
0.21	4,45	4,51	4,51
0.41	4,59	4,68	4,68
0.62	4,73	4,85	4,87
0.83	4,87	5,03	5,06
1.03	5,01	5,21	5,26
1.24	5,15	5,39	5,48
1.45	5,28	5,58	5,70
1.66	5,42	5,77	5,93
1.86	5,55	5,95	6,16
2.07	5,68	6,14	6,40
2.28	5,80	6,34	6,65
2.48	5,93	6,54	6,89
2.69	6,05	6,73	7,15
2.89	6,16	6,93	7,41
3.10	6,28	7,12	7,67
3.31	6,39	7,32	7,94
3.52	6,49	7,52	8,21
3.72	6,60	7,72	8,48
3.93	6,70	7,92	8,75
4.14	6,80	8,12	9,03
4.34	6,89	8,32	9,31
4.55	6,99	8,52	9,59
4.76	7,08	8,72	9,88
4.97	7,16	8,93	10,17
5.17	7,26	9,14	10,46
5.38	7,34	9,34	10,75
5.59	7,42	9,54	11,04
5.79	7,49	9,75	11,33
6.00	7,57	9,95	11,63

Pozn.: <sup>1</sup> Cornish-Fisher nekalibrovaný (viď 2.10)

<sup>2</sup> Cornish-Fisher kalibrovaný (viď 2.14)

Pre normálne rozdelené straty (viď 2.3) je  $\text{CVaR}_\alpha(S) = 4.22$  pre  $\gamma_3 \in (0,6]$ .

Tabuľka A.3: Odhad  $\text{CVaR}_\alpha(S)$  vzhľadom k šikmosti katastrofy pre  $\alpha = 0.01$ ,  $\sigma = (1, 0.05, 1)^\top$ ,  $\gamma = (0.15, 0.15, \gamma_3)^\top$ ,  $\gamma_3$  sa mení v  $(0,6]$ . Korelácie stanovené ako v A.3.

$\gamma_3$	Lognorm.	CF nekalibr. <sup>1</sup>	CF kalibr. <sup>2</sup>	MC <sup>3</sup>
0.21	4,29	4,34	4,34	4,30
0.41	4,41	4,49	4,49	4,41
0.62	4,54	4,65	4,67	4,54
0.83	4,66	4,82	4,84	4,69
1.03	4,78	4,98	5,02	4,83
1.24	4,90	5,14	5,22	4,98
1.45	5,02	5,31	5,42	5,09
1.66	5,14	5,48	5,62	5,23
1.86	5,25	5,65	5,83	5,32
2.07	5,36	5,83	6,04	5,43
2.28	5,47	6,00	6,27	5,51
2.48	5,57	6,18	6,49	5,59
2.69	5,67	6,35	6,72	5,66
2.89	5,77	6,53	6,95	5,74
3.10	5,87	6,71	7,19	5,83
3.31	5,96	6,89	7,42	5,89
3.52	6,05	7,07	7,67	5,91
3.72	6,13	7,25	7,91	5,98
3.93	6,22	7,43	8,16	6,01
4.14	6,29	7,61	8,41	6,07
4.34	6,37	7,79	8,66	6,08
4.55	6,45	7,98	8,91	6,07
4.76	6,59	8,16	9,17	6,14
4.97	6,52	8,34	9,43	6,10
5.17	6,59	8,53	9,69	6,16
5.38	6,65	8,71	9,95	6,26
5.59	6,72	8,89	10,22	6,21
5.79	6,79	9,09	10,48	6,23
6.00	6,84	9,27	10,75	6,27

Pozn: <sup>1</sup> Cornish-Fisher nekalibrovaný (viď 2.9)

<sup>2</sup> Cornish-Fisher kalibrovaný (viď 2.13)

<sup>3</sup> Monte Carlo simulácie

Pre normálne rozdelené straty (viď 2.2) je  $\text{VaR}_\alpha(S) = 4.07$  pre  $\gamma_3 \in (0,6]$ .

Tabuľka A.4: Odhad  $\text{VaR}_\alpha(S)$  vzhľadom k šikmosti katastrofy pre  $\alpha = 0.005$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = (1, 0.05, 1)^\top$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = (0.15, 0.15, \gamma_3)^\top$ ,  $\gamma_3$  sa mení v  $(0,6]$ . Korelácie stanovené ako v A.3.



Poč. veľ. rizík <sup>1</sup>	Lognorm.	CF nekalibr.	CF kalibr.	Norm. <sup>2</sup>
0	0,01	0,51	0,51	1,31
1	2,10	9,06	10,69	9,95
2	3,24	17,52	19,38	15,63
3	4,36	26,54	26,83	21,67
4	5,13	35,15	33,98	27,20
5	5,87	41,57	40,47	28,66
6	5,98	44,16	44,16	28,59

Pozn: <sup>1</sup> Počet veľkých rizík

<sup>2</sup> Normálne rozdelené straty (viď 2.2)

Tabuľka A.5: Absolútna odchýlka odhadov VaR od  $(1 - \alpha)$ -kvantilu  $10^6$  Monte Carlo simulácií pre  $\alpha = 0.005$  a  $n = 6$ . Veľké riziká s parametrami  $\sigma_i = 4, \gamma_i = 5$ , ostatné  $\sigma_i = 1, \gamma_i = 0.5$ . Korelácie stanovené ako v A.1.

Poč. veľ. rizík	Lognorm.	CF nekalibr.	CF kalibr.	Norm.
0	0,09	1,33	1,33	2,26
1	2,12	9,98	14,57	9,46
2	4,26	18,77	24,39	14,53
3	5,52	26,67	33,05	18,41
4	6,33	33,76	41,35	20,82
5	8,15	42,03	49,67	23,20
6	9,68	49,99	57,41	25,43
7	11,73	59,06	64,94	29,21
8	13,46	67,67	72,57	31,81
9	13,88	75,63	78,37	38,47
10	16,38	84,69	86,50	39,59
11	17,17	91,99	92,84	42,34
12	18,67	99,77	99,77	43,90

Tabuľka A.6: Absolútna odchýlka odhadov  $\text{VaR}_\alpha(S)$  od  $(1 - \alpha)$ -kvantilu  $10^6$  Monte Carlo simulácií pre  $\alpha = 0.005$  a  $n = 12$ . Veľké riziká  $X_i$  s parametrami  $\sigma_i = 4, \gamma_i = 5$ , ostatné  $\sigma_i = 1, \gamma_i = 0.5$ . Korelácie stanovené ako v A.2.

## A.2 Numerická štúdia – použité korelačné matice

Všetky korelačné matice je možné nájsť v EIOPA (2014).

Korelačná matica modulu tržného rizika.

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ 0.5 & 1 & . & . & . & . \\ 0.5 & 0.75 & 1 & . & . & . \\ 0.5 & 0.75 & 0.5 & 1 & . & . \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Korelačná matica podrizík rizika poistné a rezervy.

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0.5 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0.5 & 0.25 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 1 & . & . & . & . & . & . \\ 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 1 & . & . & . & . & . \\ 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 & . & . & . & . \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & . & . & . \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 1 & . & . \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 1 & . \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Korelačná matica rizikového modulu neživotného poistenia.

$$\begin{pmatrix} 1 & . & . \\ 0 & 1 & . \\ 0.25 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$